



TITLE:

大変形弾性体の衝突：実験とモデル化 (非線形現象の数理解析と実験解析)

AUTHOR(S):

田中, 良巳

CITATION:

田中, 良巳. 大変形弾性体の衝突：実験とモデル化 (非線形現象の数理解析と実験解析). 数理解析研究所講究録 2011, 1748: 24-31

ISSUE DATE:

2011-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171088>

RIGHT:

大変形弾性体の衝突

—実験とモデル化—

北海道大学・電子科学研究所 田中 良巳 (Yoshimi Tanaka)

Research Institute for Electronic Science,
Hokkaido University

1 はじめに

固体の衝突は、惑星科学から建築物の解体・機械加工、あるいは、球技（戯）など、基礎科学から工学あるいは日常生活に至るまで広範囲の事柄に関わる現象である。その科学的な研究の始まりは、ヘルツによる弾性接触理論 [1] の提出とその結果の接触時間問題（2 物体の衝突において、衝突速度とそれらが接触している時間との関係を問う問題）への適用にまで遡ることが出来る。20 世紀以降は、固体衝突の研究は主として応用的な観点から行われて、金属を中心とする構造材料の衝突特性について多くの実験データが蓄積されるとともに、理論的にそれらを説明するために、上述のヘルツ理論を基礎にしつつ、その上に、弾性振動や様々な散逸効果、例えば、塑性変形や固体粘性などを考慮した現象論が提出されてきた [2, 3, 4]。さらに、1990 年代からは、粉体ダイナミクスを基礎づけることを目的として、球状固体の衝突現象が、跳ね返り係数の衝突速度依存性の理解を中心課題として、再び基礎的・物理的な観点から研究されるようになってきている [5, 6, 7, 8]。

ここでは、ソフトマターの一つであるゲルの衝突現象に関する実験および理論研究 [9, 10, 11] について述べる。ゲルを含め、いわゆるソフトマター物理が対象とするような物質群における衝突現象 [12, 13, 14] には、それ固有の意義を見出すことができる。第一に、ソフトマターは小さな外力に対しても大きな変形を生じ、かつ、その構成関係（応力と歪（とそれらの時間微分）との関係）は多種多様である。こうした系の衝突挙動を通常の硬質の固体におけるものと対比させながら特徴づけ、理解していくことは、連続体力学的な観点から興味深いことである。また、ある種のソフトマターは生体組織のモデル物質とみなされたり、緩衝材として用いられたりする。そうした系の衝突特性を研究することは、基礎科学としての（ソフトマター）物理学がバイオメカニクス等応用も含めた他分野と生産的な交流を行う機会の一つになり得る。

我々の実験では、球状のゲルを剛体基板に衝突させ、衝突中のゲルの変形過程や基板が受ける衝撃力を計測した。ゲルの衝突挙動は、微少変形領域を扱うヘルツ理論の予測とは大きく異なった振舞いを示した。大変形衝突の特徴を考慮した力学モデルを構築し、実験データとの比較を行った。

$E(10^4 \text{ Pa})$	$V_c \text{ (m/s)}$
0.61	2.40
1.24	3.42
2.09	4.45
2.71	5.04
3.88	6.05
6.46	7.81

表 1: 試料として用いたアクリルアミドゲルの Young 率 E と及び $V_c \equiv \sqrt{E'/\rho}$ (ρ はゲルの密度) で定義される特徴的速度スケール。

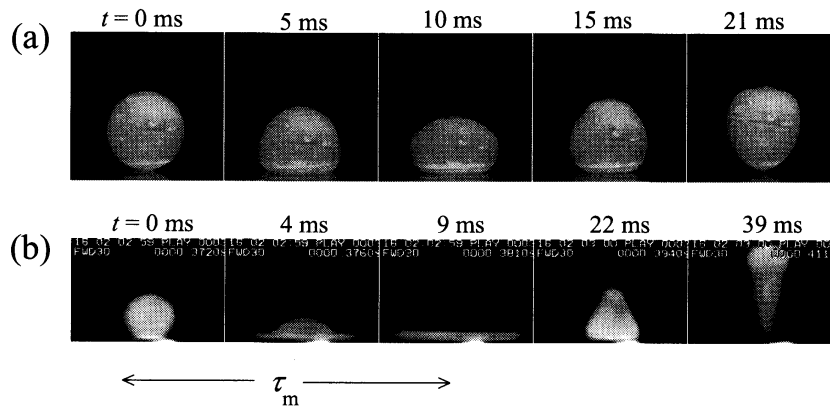


図 1: 衝突過程の例。(a)A10B30 ゲル、 $V_i/V_c = 0.24$ ($V_i = 1.9\text{m/s}$) での衝突過程。(b)A10B4 ゲル、 $V_i/V_c = 1.77$ ($V_i = 6.1\text{m/s}$) での衝突過程。最大変形は、接触中にゲルの横方向のサイズ変化が最大となる状態として定義した。

2 実験

衝突実験の試料として、球状のアクリルアミドゲル (半径 $R_0=25\text{mm}$) を用いた。組成を変化させることで Young 率の異なるゲル試料を準備した。表 1 には、試料ゲルのヤング率 E 、および E とゲルの密度 ρ から決まる特徴的速度スケール $V_c \equiv \sqrt{E/\rho}$ の値を示した。

衝突実験では、吸引チューブによってゲル球を基板 (厚さ 10mm のアルミ板) の上方に固定し、吸引を止めることでゲルの落下を開始させ、基板と衝突させた。衝突速度 V_i は、 h を吸引状態でのゲルの底部と衝突を受ける基板表面との距離として、 $V_i = \sqrt{2gh}$ によって決定した。この衝突過程を、高速 CCD ビデオカメラ (Motion Coder Analyzer: Kodak 社製) によって記録した (記録速度は 1000FPS)。また、アルミ基板上にロードセルを配置することでゲルが基板に及ぼす衝撃力を計測した。

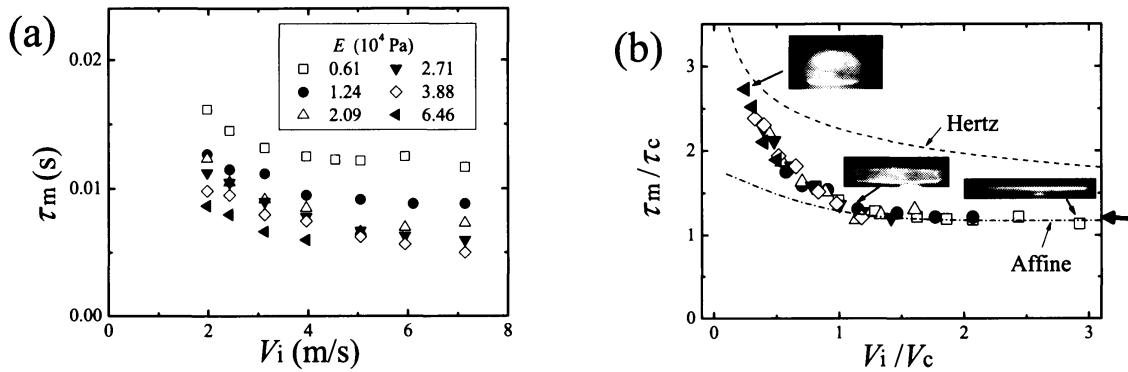


図 2: (a): 衝突速度 V_i と変形時間 τ_m の関係。(b): V_i/V_c と τ_m/τ_c の関係。また、ヘルツ理論から定まる曲線、及び、後で導入するモデルが予想する曲線も合わせて示した。挿入した 3 枚の写真は、それらが指すデータ点に対応する最大変形時のゲルの形状である。 V_c と τ_c によってスケールすることにより、(a) の全てのデータは一つのマスターカーブに重なる。 V_i/V_c が大きな領域では、 τ_m/τ_c は殆ど一定値である。

3 結果

図 1 はゲル球の衝突過程の高速度ビデオカメラによる記録画像である。(a) は、本研究において最も変形が小さい条件、(b) は比較的変形の大きい条件での衝突過程である。(a) においてでさえ、変形はゲル球全体に及んでいることがわかる。また、(b) のような速い衝突では、最大変形時のゲルは、薄いパンケーキ状である。一方、跳ね返りの瞬間には、鉛直方向に大きく引き伸ばされている。かつ、そのときの形状は、底部は尖っているのに対して頭部は丸みを帯びており、基板と平行な面に関して非対称なものとなっている。

衝突過程の記録画像から、接触開始から最大変形に達するまでの時間 τ_m を計測した。図 2(a) は、各試料における τ_m と V_i との関係を示す。図 2(b) は、特徴的速度スケール V_c と特徴的時間スケール $\tau_m = R_0/V_c$ を用いて、図 2(a) のデータを無次元化プロットしたものである。この無次元化によって、 τ_m のデータは一本のマスターカーブに乗ることがわかる。図中に“Hertz”と記された曲線は、微小変形領域で成り立つヘルツ理論 [1, 2, 3, 15] の予測である。 V_i/V_c が小さな領域 (≈ 0.3) では、実験値はヘルツの予測に近いが、 V_i/V_c が増加するにしたがってヘルツ理論の予測より早く減少し ($V_i/V_c = 1$ 程度まで)、さらに V_i/V_c が大きい領域では、ほぼ一定値となる (高衝突速度側におけるプラトー域の存在)。

図 3 は、異なる衝突速度における接触力 $F(t)$ の振舞いである。遅い衝突 ((a); $V_i/V_c = 0.26$) では、 $F(t)$ は一つのピークをもつ関数であるが、中間的な衝突速度 ((b); $V_i/V_c = 0.88$) では、最初の大きなピークの後に小さな二つ目のピークが現れている。衝突中にゲルが著しく扁平化するような速い衝突 ((c); $V_i/V_c = 2.5$) では、 $F(t)$ は完全に二つの山に別れ、その間の時間領域では、 $F(t)$ はほぼ 0 になる。

図 4 は、接触力のピーク値 F_m と衝突速度 V_i との関係を示すデータの無次元化プロットである。 F_m は、特徴的な力のスケール $F_c \equiv ER_0^2$ によって無次元化されている。 $(F(t))$ に二つのピークが現れる条件では、二回目のピークでの値も示してある。) この場合も全てのデータが共通のマスターカーブに重なることがわかる。“Hertz”と記され

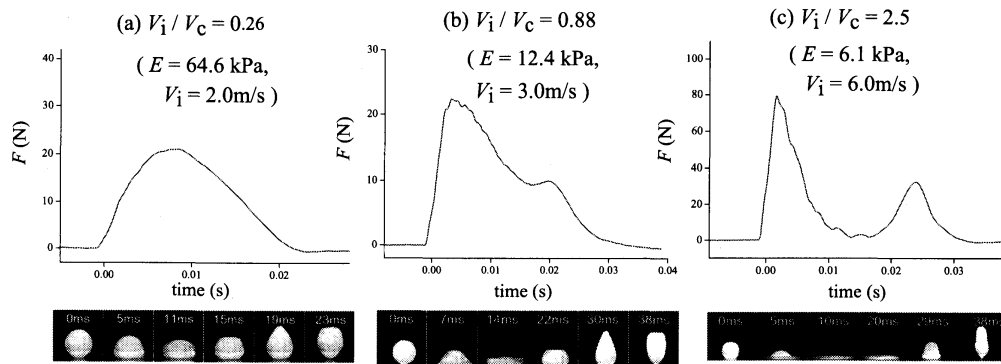


図 3: 接触力の時間変化 $F(t)$ 、及び、対応する衝突での変形過程。大きな衝突速度では、 $F(t)$ が二つのピークをもつ関数となる。

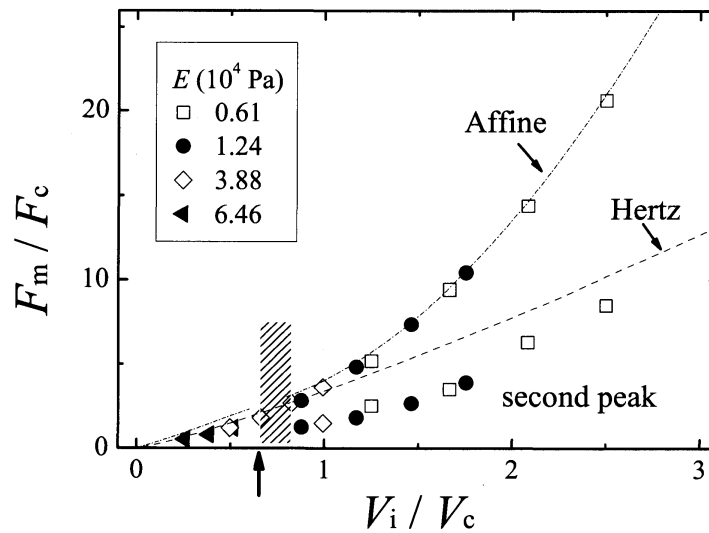


図 4: 接触力のピーク値 F_m の振舞い。ヘルツ理論、および、アフィンモデルの予想もあわせて示した。

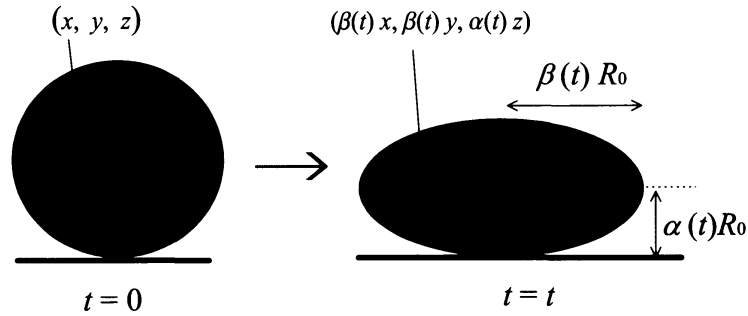


図 5: アフィン変形モデルの説明。衝突後、ゲル球の外形は伸長比 $\alpha(t)$ 、及び、 $\beta(t)$ で特徴付けられる回転楕円体になる。また、内部もそれと相似的に変形する。

た曲線は、ヘルツ理論の予測である。 $F(t)$ が一つのピークしか持たない V_i/V_c が小さい領域では、実験データはヘルツ理論と一致している。しかし、 $F(t)$ に二つ目のピークが現れる V_i/V_c が大きな領域では、接触力の最大値（一つ目のピークに対する F_m ）の実験データは、ヘルツ理論の予想より大きくなる。この振舞いは、次の章で導入するモデルの予想とよく一致している。

4 モデル

上に述べたように、ゲルの衝突では系全体が大きく扁平化するという変形モードが見られた。また、変形に要する時間 τ_m や衝撃力の振る舞いは、微小変形を前提とする線形弾性論に基づくヘルツ理論の予測からかけ離れたものとなった。このような場合の取扱いとして、系全体が一様に変形するという仮定に基づくモデル（アフィン変形モデル）を考察する。これによって大変形領域での τ_m や F_m の振舞いが定量的に説明される。

モデルの仮定として、(i) ゲル球は基板との接触後（鉛直軸に関する）軸対称性を保ったままアフィンの変形とする（図 5）。さらに、(ii) ゲルの変形エネルギーとして理想ゴムタイプのもの¹を採用する。仮定 (i) によって、ゲルの変形や運動は鉛直方向の伸長率 $\alpha(t)$ と水平方向の伸長率 $\beta(t)$ によって特徴付けられる：ゲル球の中心（重心）の速度 $V(t)$ は $R_0 \dot{\alpha}(t)$ で与えられ、また、図 5 に示したように、接触開始である時刻 $t=0$ において、球の中心から (x, y, z) という相対位置にあった物質点は、時刻 t において、中心から見て $(\beta(t)x, \beta(t)y, \alpha(t)z)$ という位置に動く（ここで (x, y, z) は、変形前のゲル球の各部につけた（相対）Lagrange 座標である）。よって、この物質点の（相対）速度 \vec{u} は、 $(\dot{\beta}(t)x, \dot{\beta}(t)y, \dot{\alpha}(t)z)$ で与えられる。

この系の時間発展は、次のラグランジアン $L = K - U$ によって与えられる。

$$L = \left(\frac{m_\alpha R_0^2}{2} \dot{\alpha}^2 + \frac{m_\beta R_0^2}{2} \dot{\beta}^2 \right) - \frac{EM}{2 \cdot 3\rho} (\alpha^2 + 2\beta^2 - 3) \quad (1)$$

ただし、これに系の非圧縮性を表わす拘束条件

$$\alpha(t)\beta(t)^2 = 1 \quad (2)$$

¹例えば、体積 L^3 の立方体が、一様に変形して、各辺の長さが αL 、 βL 、 γL の直方体になる時の変形エネルギーが、 $\{\text{体積 } L^3\} \times \{\text{線形領域での弾性率 } E\} \times \{\text{各方向の伸長率の 2 乗の和 } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\}$ に比例する。詳しくは、例えば [16]

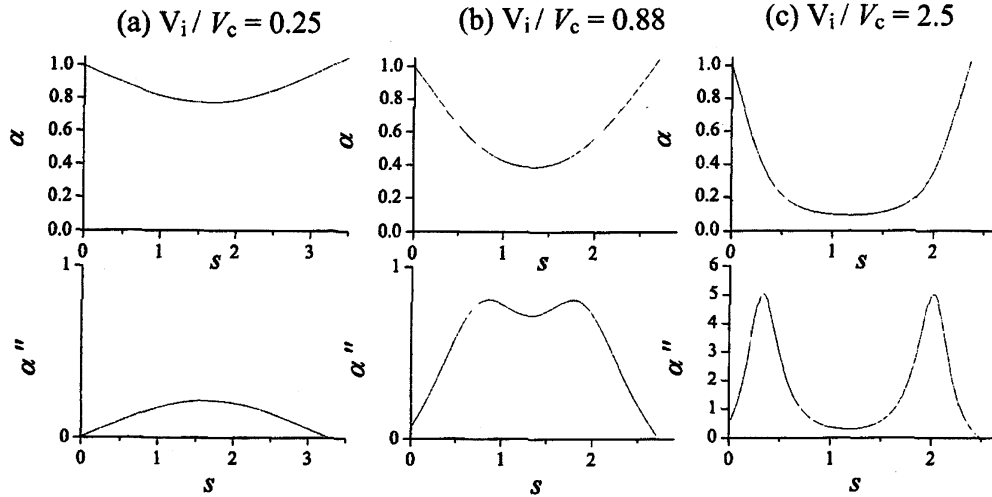


図 6: アフィンモデルにおける $\alpha(s)$ 及び $\alpha''(s)$ の振舞い。 $\alpha''(s)$ は、接触力に比例する量であり、衝突速度が増加すると、これが二つのピークを持つ関数となる。この振舞いは実験と対応している。

が課される。 M はゲル球の質量であり、また $m_\alpha \equiv 6M/5$ 、 $m_\beta \equiv 2M/5$ である。 L の左辺第 1 項は、系の運動エネルギー K であり、重心運動からの寄与 $(1/2) MV(t)^2 = (1/2)M(R_0\dot{\alpha}(t))^2$ と重心に相対的な運動からの寄与 $\int_V \frac{\rho}{2} |\vec{u}|^2 dx dy dz = \frac{\rho}{2} \int (\dot{\alpha}^2 z^2 + \dot{\beta}^2 x^2 + \dot{\beta}^2 y^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{5}\right) R_0^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2M}{5}\right) R_0^2 \dot{\beta}^2$ の和で与えられる。 L の左辺第 2 項は、ポテンシャルエネルギー U であり、 M/ρ (ρ はゲルの密度) は球状ゲルの体積を表し、因子 $E/3$ は上式が微小変形の極限において線形弾性論の歪エネルギーに一致するという要請から生じる [16]。式の上からは、この系を次のように特徴づけることが出来る： 各々異なる質量およびバネ係数をもつ調和振動子の自由度 α 、 β からなる系であり、かつ、それらの間には式 (2) で表される拘束が課せられている。

非圧縮条件から β 及び $\dot{\beta}$ を消去しオイラーラグランジュの式 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \alpha} \right) = 0$ を適用すると、 α の発展方程式 $(1 + \frac{1}{12\alpha^3}) \ddot{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}^2}{8\alpha^4} + \frac{5E}{18\rho R_0^2} (\alpha - \frac{1}{\alpha^2}) = 0$ が得られる。また、初期条件は、 $\alpha(t=0) = 1$ 及び $\dot{\alpha}(t=0) = \sqrt{10/13} \times (V_i/R_0)$ である。二つ目の条件は、基板との接触が開始する時刻 $t=0$ におけるエネルギー保存の条件、即ち、 $(1/2) \times MV_i^2 = K(t=0)$ に由来する。先に導入した特長的な速さスケール $V_c = \sqrt{E/\rho}$ と時間スケール $\tau_c = R_0/V_c$ を用いて無次元化すると、発展方程式は以下ようになる。

$$\alpha'' - \frac{3}{2\alpha(12\alpha^3 + 1)} \alpha'^2 + \frac{10k(\alpha^4 - \alpha)}{12\alpha^3 + 1} = 0, \quad (3)$$

$$\alpha(0) = 1 \quad \text{and} \quad \alpha'_0 = \sqrt{\frac{10}{13}} \frac{V_i}{V_c}. \quad (4)$$

ここでプライム記号「'」は、スケールされた時間 $s = t/\tau_c$ に関する微分を表す。

図 6 は、異なる初期条件 (衝突速度) における式 (3)、式 (4) の数値解から決めた $\alpha(s)$ と $\alpha''(s)$ の振舞いである。アフィンモデルにおいては、 α が極少に達する時刻、即ち、 β が最大に達するときの s の値が最大変形時間 τ_m/τ_c となる。図 2(a) において、“Affine”と記されている曲線がこのモデルの予想である。衝突速度が大きい領域での τ_m のデータの特徴、即ち、プラトーの存在とその値を、このモデルは非常によく再現する。

また、図5に示したようにアフィンモデルでは、重心の鉛直方向の位置が $R_0\alpha$ で与えられるので、接触力 F は、 $MR_0\ddot{\alpha} = \frac{4\pi}{3}F_c\alpha''$ となる。図6に示した $\alpha''(s)$ の形状は時間 s について対称的であり、図3の $F(t)$ の形状とは異なっている。しかしながら、 $\alpha''(s)$ は、実験で得られた $F(t)$ の振舞いの本質的な特徴を捉えている。第一に、アフィンモデルは、 V_i/V_c を増加させると、接触力に二つのピークが生じることを予測する。特に、大きな衝突速度においては、 $\alpha''(s)$ が二つの山に分離し、その間では α'' の値が、ほぼ0となる；このような振舞いは、図3(c)に示された接触力の振舞いと合致する。図4において“Affine”と記された曲線は、アフィンモデルが予測する接触力のピーク値 F_m/F_c と V_i/V_c の関係である。モデルの予想は、大きな V_i/V_c における、一つ目のピークに対する F_m/F_c (即ち、接触力の最大値) の実験データと非常によく一致している。

5 考察

まず、直感的な議論と式(1)のラグランジアンから τ_m のプラトー値が直接評価できることを示す。衝突速度が大きい極限では、衝突後のゲル球は直ちに $\alpha \ll \beta$ を達成し、 τ_m の値は、それ以降の運動に支配される。このとき、 $\alpha = \beta^{-2} \ll \beta$ 及び $\dot{\alpha} = -2\beta^{-3}\dot{\beta} \ll \dot{\beta}$ に注意すると、近似的に (あるいは $V_i \rightarrow \infty$ に関する漸近則を得るという意味において)、式(1)の中の α 及び $\dot{\alpha}$ に関する項を落とすことが出来る。結果として、式(1)は1自由度の調和振動子のラグランジアンに還元される。 τ_m はこの振動子の固有周期の1/4倍に対応する。実際にこれを評価すると $\tau_m/\tau_c = (\pi/2) \times \sqrt{3/5}$ となる。この値 (図2(b)の右側に太い矢印で示されている) はプラトーの値と一致する。

次に、接触力 $F(t)$ に生じた二つのピーク起源を考察する。大きな衝突速度では、ゲル球が扁平化し、水平方向への広がり (最大変形に達した後の) 収縮が、主要な運動のモードとなる期間が存在する (図6(c)において、 $\alpha(s)$ の平らな底がこの期間に対応している)。この期間では、重心の位置は基板の近傍に停滞し、その速度、及び、加速度 (これは接触力に比例する) は小さくなる。即ち、最大変形の前後において、接触力は非常に小さい。これに対して、重心の (縦方向の) 加速度が大きくなるのは、衝突直後にゲルの各部分の縦方向の速度が水平方向に変換される時と、最大変形の後に水平方向の速度が縦方向に戻る時である。これが、 $F(t)$ に生じる二つのピークの原因である。

一方で α という一自由度しか持たないアフィン変形モデルでは、図1に見られた実際のゲル球の変形過程の時間的・空間的非対称性を説明することは出来ない。この非対称性を、モデルを改良して取り扱うことには成功していないが、直感的には次のように説明出来る。時刻 $t = \tau_m$ において、パンケーキ状になったゲル球を考える。この各部は、中心方向引かれており、 $t = \tau_m$ 以降、ゲル球は横方向のサイズを減じ、同時に縦方向のサイズを回復する。この過程で、境界条件の非対称性 (パンケーキの上面は自由表面、底面は基板に接している) のため、パンケーキの中心が盛り上がるような変形が生じる。一旦こうした変形が生じると、さらに横方向の収縮が進行するとともに、それは拡大される。この過程では、球の頂点近くの部位は縦方向に強く加速される一方で底部付近は殆ど動かない、という速度の非一様性 (或いは、内部モード) が誘起される。

6 まとめ

本研究では、ゲルに特有な弾性的大変形を伴う衝突において、(i) 変形時間 τ_m が衝突速度 V_1 に依存しなくなる、(ii) 接触力 $F(t)$ が2つのピークを持ち最大変形で殆ど0になる、という二つの特徴的な振舞いが実験的に見出された。上に考察したように、 τ_m の漸近値は水平方向の変形を記述するモード β だけに関する有効ラグランジアンによって直接的に理解できるし、また、 $F(t)$ の二つのピークについても、初期の鉛直方向の運動量が、水平方向の運動量に一旦変換されることの当然の帰結であった。大変形を伴う衝突では、衝突速度と垂直な方向への変形が本質的な役割をはたしている。

一方、衝突過程の時間的・空間的な非対称性を理解するには、衝突中のゲルの変形に関するより詳細な考察・モデル化が必要となる。こうした点については、未解決な問題として残されている。

参考文献

- [1] Hertz H., *J. Reine Angew. Math.* **92**, 156(1882)
- [2] Goldsmith W., *Impact*, Arnold, London, 1960.
- [3] Stronge W. J., *Impact Mechanics*, Cambridge Univ Press, 2000.
- [4] Kuwabara, G. and Kono K., *Jpn. J. Appl. Phys.*, **26**, 1230(1987).
- [5] Labous L., Rosato A. D. and Dave R. N., *Phys. Rev. E*, **56**, 5717(1997).
- [6] Gerl F. and Zippelius A., *Phys. Rev. E*, **59**, 2361(1999).
- [7] Hayakawa H. and Kuninaka H., *Chem. Eng. Sci.*, **157**, 239(2002).
- [8] 早川 尚男, 散逸粒子系の力学, 岩波書店, 2003.
- [9] Tanaka Y., *The European Physical Journal E*, **18**, 95 (2005).
- [10] Tanaka Y., *Phys. Rev. E*, **73**, 031403 (2006).
- [11] 田中 良巳, 物性研究, **85**, 499 (2006).
- [12] Richard D., Clanet C. and Quéré D., *Nature* (London), **417** 811 (2002).
- [13] C. Clanet C., Hersen H. and Bocquet L., *Nature* **427**, 29 (2004).
- [14] Nagahiro S. and Hayakawa Y., *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 174501(2005).
- [15] Landau L. D. and Lifshitz E. M., *Theory of Elasticity*, Pengamon Press, 1960.
- [16] Strobl G. R., *The physics of polymers*, Springer Verlag, Berlin, 1997; 深尾浩次, 宮本嘉久, 宮地英紀, 林久夫訳, 高分子の物理, シュプリンガー東京, 1998.